

2020~2021 学年度苏锡常镇四市高三教学情况调研(一)

数 学

2021 年 3 月

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答字写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将答题卡交回。

一、选择题: 本题共 8 小是, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集 $U=R$, 集合 $A=[2, 4]$, $B=\{x|\log_2 x>1\}$, 则集合 $A\cap(C_U B)=$

- A. ∞ B. $\{2\}$ C. $\{x|0\leq x\leq 2\}$ D. $\{x|x\leq 2\}$

【答案】B

【考点】集合的运算

【解析】由题意 $B=(2, +\infty)$, 则 $C_U B=(-\infty, 2]$, 所以 $A\cap(C_U B)=\{2\}$, 故答案选 B.

2. “ $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ” 是 “ $\sin \alpha = \cos \alpha$ ” 的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】D

【考点】三角函数的终边角、三角函数值、逻辑用语中条件的判断

【解析】由题意当时 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， α 可为 $\frac{3\pi}{4}$ ，不能得到 $\sin \alpha = \cos \alpha$ ；当 $\sin \alpha = \cos \alpha$ 时，

α 可为 $\frac{5\pi}{4}$ ，此时 $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，故答案选 D.

3. 天干地支纪年法源于中国，中国自古便有十天干与十二地支，十天干即甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸；十二地支即子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥. 天干地支纪年法是按顺序以一个天干和一个地支相配，排列起来，天干在前，地支在后，天干由“甲”起，地支由“子”起，例如，第一年为“甲子”，第二年为“乙丑”，第三年为“丙寅”……，以此类推，排列到“癸酉”后，天干回到“甲”重新开始，即“甲戌”，“乙亥”，然后地支回到“子”重新开始，即“丙子”……，以此类推. 今年是辛丑年，也是伟大、光荣、正确的中国共产党成立 100 周年，则中国共产党成立的那一年是

- A. 辛酉年 B. 辛戌年 C. 壬酉年 D. 壬戌年

【答案】A

【考点】文化题：等差数列的应用

【解析】由题意天干是公差为 10 的等差数列，地支为公差为 12 的等差数列，则 100 年前可得到为辛酉年，故答案选 A.

4. $(3-2x)(x+1)^5$ 式中 x^3 的系数为

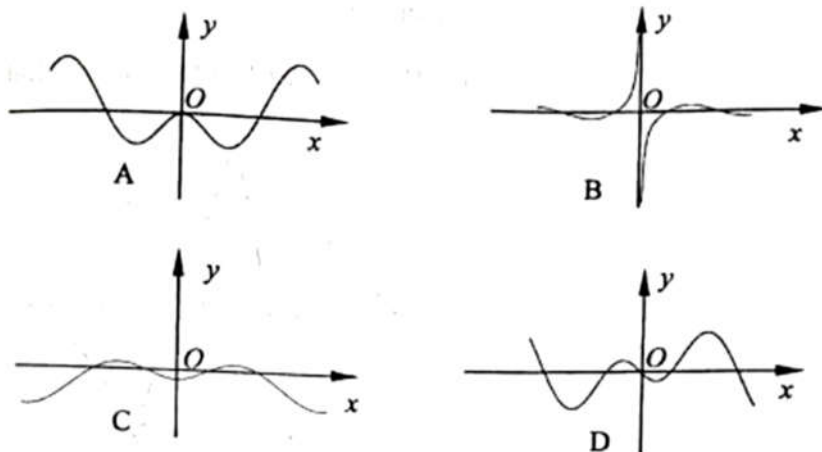
- A. -15 B. -10 C. 10 D. 15

【答案】C

【考点】二项式定理展开式的应用

【解析】由题意展开式中含 x^3 的系数为 $3C_5^2 - 2C_5^3 = 10$ ，故答案选 C.

5. 函数 $f(x) = \sin x \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$ 的图象大致是



【答案】A

【考点】函数的图象判断与识别

【解析】由题意 $f(0)=0$ ，可排除 B、C 选项；又 $f(-x)=\sin(-x)\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=$

$$-\sin x \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}-x}\right) = -\sin x \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right) = -\sin x \ln(\sqrt{x^2+1}-x)^{-1}$$

$$= \sin x \ln(\sqrt{x^2+1}-x) = f(x), \text{ 为偶函数, 所以排除 D 选项, 故答案选 A.}$$

6. 过抛物线 $y^2=2x$ 上一点 P 作圆 $C: x^2+(y-6)^2=1$ 的切线, 切点为 A, B , 则当四边形 $PACB$ 的面积最小时, P 点的坐标是

- A. $(1, \sqrt{2})$ B. $(\frac{3}{2}, \sqrt{3})$ C. $(2, 2)$ D. $(\frac{5}{2}, \sqrt{5})$

【答案】C

【考点】抛物线的几何性质、直线与圆综合应用

【解析】由题意可设 $P(\frac{1}{2}a^2, a)$, 当四边形 $PACB$ 的面积最小时, 点 P 到圆心 $C(0, 6)$

的距离最小, 即 $PC^2 = \left(\frac{1}{2}a^2\right)^2 + (6-a)^2 = \frac{1}{4}a^4 + a^2 - 12a + 36$, 可令

$f(a) = \frac{1}{4}a^4 + a^2 - 12a + 36$ 则 $f'(a) = a^3 + 2a - 12 = (a-2)(a^2 + 2a + 6)$, 则 $f'(a) = 0$ 时,
 $a = 2$, 此时取得最小值, 四边形 $PACB$ 的面积为 $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \sqrt{PC^2 - 1} = \sqrt{2^2 + (6-2)^2 - 1} = \sqrt{19}$,
 所以 $P(2, 2)$ 则故答案选 A.

7. 若随机变量 $X \sim B(3, p)$, $Y \sim N(2, \sigma^2)$, 若 $P(X \geq 1) = 0.657$, $P(0 < Y < 2) = p$, 则 $P(Y > 4) =$

- A. 0.2 B. 0.3 C. 0.7 D. 0.8

【答案】A

【考点】二项分布、正态分布的应用

【解析】由题意 $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^3 = 0.657$, 解得 $p = 0.3$, 则 $P(0 < Y < 2) = 0.3$, 所以 $P(Y > 4) = P(Y < 0) = 0.5 - P(0 < Y < 2) = 0.2$, 故答案选 A.

8. 若 $f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{16}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 则满足 $xf(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围是

- A. $[-1, 1] \cup [3, +\infty)$ B. $(-\infty, -1] \cup [0, 1] \cup [3, +\infty)$
 C. $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$ D. $(-\infty, -3] \cup [-1, 0] \cup [1, +\infty)$

【答案】B

【考点】分段函数中函数的性质应用：求解不等式

【解析】由题意，不妨求 $(x+1)f(x) \geq 0$

①当 $x = -1$ 或 0 时显然成立；

②当 $x < -1$ 时，可有 $x^3 - \frac{16}{x} \leq 0$ ，可解得 $x \leq -2$ ；

③当 $x > -1$ 且 $x \neq 0$ 时，可有 $x^3 - \frac{16}{x} \geq 0$ ，可解得 $-1 < x < 0$ 或 $x \geq 2$ ；

所以 $x \in (-\infty, -2] \cup [-1, 0] \cup [2, +\infty)$

则原不等式的解为 $x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1] \cup [3, +\infty)$ ，故答案选 B.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，则

A. 函数 $y = f(x)$ 的图象可由函数 $y = \sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位得到

B. 函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 轴对称

C. 函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{8}, 0)$ 中心对称

D. 函数 $y = x^2 + f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{8}\right)$ 上为增函数

【答案】BCD

【考点】三角函数的图象与性质、图象变换

【解析】由题意，对于选项 A，函数 $y = \sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位可得到

$f(x) = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2x$ ，所以选项 A 错误；对于选项 B，

$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ ，取到了最大值，所以函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 轴对称，

所以选项 B 正确；对于选项 C， $f\left(-\frac{\pi}{8}\right) = 0$ ，所以函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{8}, 0)$ 中心对

称，所以选项 C 正确；对于选项 D，函数 $y = x^2$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{8}\right)$ 上为增函数， $x \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right)$ 时，

$2x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，单调递增，所以函数 $y = x^2 + f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{8}\right)$ 上为增函数，所以选项 D 正

确；综上，答案选 BCD.

10. 已知 O 为坐标原点, F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 点 P

在双曲线右支上, 则下列结论正确的有

A. 若 $PO = PF_2$, 则双曲线的离心率 $e \geq 2$

B. 若 $\triangle POF_2$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的正三角形, 则 $b^2 = 2\sqrt{3}$

C. 若 A_2 为双曲线的右顶点, $PF_2 \perp x$ 轴, 则 $F_2A_2 = F_2P$

D. 若射线 F_2P 与双曲线的一条渐近线交于点 Q , 则 $|QF_1 - QF_2| > 2a$

【答案】ABD

【考点】双曲线的几何性质的应用

【解析】由题意, 对于选项 A: 因为 $PO = PF_2$, 所以 OF_2 的中垂线 $x = \frac{c}{2}$ 与双曲线有交点,

即有 $\frac{c}{2} \geq a$, 解得 $e \geq 2$, 故选项 A 正确; 对于选项 B, 因为 $PF_2 = OF_2 = OF_1 = c = 2$, 解

得 $PF_1 = 2\sqrt{3}$, 所以 $a = \frac{PF_1 - PF_2}{2} = \sqrt{3} - 1$, 所以 $b^2 = c^2 - a^2 = 2\sqrt{3}$, 故选项 B 正确;

对于选项 C, $F_2A_2 = c - a, F_2P = \frac{b^2}{a}$, 显然不等, 故选项 C 错误; 对于选项 D, 不妨设 P, Q 均

在第一象限, 则: $|QF_1 - QF_2| = QF_1 - QF_2 > PF_1 - PQ - QF_2 = PF_1 - PF_2 = 2a$, 故选项 D 正确;

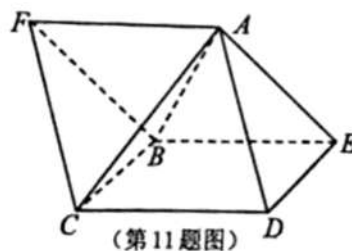
综上答案选 ABD.

11. 1982 年美国数学学会出了一道题: 一个正四面体和一个正四棱锥的所有棱长都相等, 将正四面体的一个面和正四棱锥的一个侧面紧贴重合在一起, 得到一个新几何体. 中学生丹尼尔做了一个如图所示的模型寄给美国数学学会, 美国数学学会根据丹尼尔的模型修改了有关结论. 对于该新几何体, 则

A. $AF \parallel CD$

B. $AF \perp DE$

C. 新几何体有 7 个面



D. 新几何体的六个顶点不能在同一个球面上

【答案】ABD

【考点】立体几何的位置关系、外接球问题应用

【解析】由题意，对于选项 A，由图可得 $AF \parallel BE$ ，又 $BE \parallel CD$ ，所以 $AF \parallel CD$ ，故选项 A 正确；因为 $DE \perp CD$ ，且 $AF \parallel CD$ ，所以 $AF \perp DE$ ，故选项 B 正确；对于选项 C，新几何体为三棱柱，有 5 个面，故选项 C 错误；对于选项 D，新几何体为斜三棱柱，没有外接球，故选项 D 正确；综上答案选 ABD.

12. 已知正数 x, y, z ，满足 $3^x = 4^y = 12^z$ ，则

- A. $6z < 3x < 4y$ B. $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{z}$ C. $x+y > 4z$ D. $xy < 4z^2$

【答案】AC

【考点】指对数的运算、基本不等式的应用等

【解析】由题意，可令 $3^x = 4^y = 12^z = m > 1$ ，则 $\frac{1}{x} = \log_m 3, \frac{1}{y} = \log_m 4, \frac{1}{z} = \log_m 12$ ，则有 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ ，故选项 B 错误；对于选项 A， $\frac{1}{z} - \frac{2}{x} = \log_m 12 - \log_m 9 = \log_m \frac{4}{3} > 0$ ，所以 $x > 2z$ ，又 $\frac{4}{x} - \frac{3}{y} = \log_m 81 - \log_m 64 = \log_m \frac{81}{64} > 0$ ，所以 $4y > 3x$ ，所以 $4y > 3x > 6z$ ，故选项 A 正确；对于选项 C、D，因为 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ ，所以 $z = \frac{xy}{x+y}$ ，所以 $4z^2 - xy = \frac{4x^2y^2 - xy(x+y)^2}{(x+y)^2} = -\frac{xy(x+y)^2}{(x+y)^2} < 0$ ，所以 $xy > 4z^2$ ，则 $z(x+y) > 4z^2$ ，则 $x+y > 4z$ ，所以选项 C 正确，选项 D 错误；综上，答案选 AC.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\mathbf{a}=(1, 2)$, $\mathbf{b}=(0, -2)$, $\mathbf{c}=(-1, \lambda)$, 若 $(2\mathbf{a}-\mathbf{b})\parallel\mathbf{c}$, 则实数 $\lambda=$ ▲.

【答案】-3

【考点】平面向量的共线性应用

【解析】由题意可得 $2\mathbf{a}-\mathbf{b}=(2, -6)$, 则 $2\lambda-(-1)\times(-6)=0$, 解得 $\lambda=-3$, 故答案为-3.

14. 已知复数 z 对应的点在复平面第一象限内, 甲、乙、丙、丁四人对复数 z 的陈述如下(i 为虚数单位):

甲: $z+\bar{z}=2$; 乙: $z-\bar{z}=2\sqrt{3}i$; 丙: $z\cdot\bar{z}=4$; 丁: $\frac{z}{\bar{z}}=\frac{z^2}{2}$.

在甲、乙、丙、丁四人陈述中, 有且只有两个人的陈述正确, 则复数 $z=$ ▲.

【答案】 $1+i$

【考点】新高考新题型: 逻辑推理题: 复数的运算

【解析】由题意可设 $z=a+bi$, $a>0$, $b>0$, $\bar{z}=a-bi$, $z+\bar{z}=2a$, $z-\bar{z}=2bi$,

$z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$, $\frac{z}{\bar{z}}=\frac{z^2}{a^2+b^2}$, 则乙丁与丙丁不能同时成立, 且甲乙丙可以知二推一, 所以

甲丁正确, 所以 $a=b=1$, 此时 $z=1+i$. 故答案为 $1+i$.

15. 若 $2\sqrt{3}\sin x+2\cos x=1$, 则 $\sin\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=$ ▲.

【答案】 $\frac{7}{32}$

【考点】三角函数的公式、三角恒等变换应用

【解析】由题意可得 $4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$, 令 $x+\frac{\pi}{6}=t$, 则 $\sin t=\frac{1}{4}$, $x=t-\frac{\pi}{6}$, 所以原式=

$\sin(\pi-t)\cos 2t=\sin t(1-2\sin^2 t)=\frac{7}{32}$, 故答案为 $\frac{7}{32}$.

16. 四面体的棱长为 1 或 2, 但该四面体不是正四面体, 请写出一个这样四面体的体积 ▲;
这样的不同四面体的个数为 ▲.

【答案】 $\frac{\sqrt{11}}{12}$; 3

【考点】 立体几何中四面体的应用: 求体积、四面体的构成

【解析】由题意可得, 可以构成一个底面为边长为 1 正三角形, 侧棱长均为 2 的正三棱锥或三棱锥的高 $h = \sqrt{2^2 - (\frac{\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$, 则体积 $V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{11}}{12}$, 1 和 2 可以构成的三角形有: 边长为 1 的正三角形, 边长为 2 的正三角形, 边长为 1, 2, 2 的三角形除了已求体积的正三棱锥外, 还可以是: 四个 1, 2, 2 的三角形拼成的三棱锥、两个边长为 2 的正三角形和两个 1, 2, 2 的三角形拼成的三棱锥, 所以满足题意的四面体共 3 个.

三、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 D 在边 BC 上, 满足 $AB = \sqrt{3}BD$.

(1) 若 $\angle BAD = 30^\circ$, 求 $\angle C$;

(2) 若 $CD = 2BD$, $AD = 4$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【考点】解三角形、三角恒等变换、平面向量的基本定理的应用

【解析】

(1) 在 $\triangle ABD$ 中, $\frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{AB}{\sin \angle BDA}$, 所以 $\sin \angle BDA = \frac{AB \sin \frac{\pi}{6}}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

因为 $\angle BDA \in (0, \pi)$, 所以 $\angle BDA = \frac{2\pi}{3}$, $\angle BDA = \frac{\pi}{3}$, $\angle BDA = \frac{2\pi}{3}$ 时, $\angle B = \frac{\pi}{6}$,

所以 $\angle C = \frac{\pi}{3}$, $\angle BDA = \frac{\pi}{3}$ 时, $\angle B = \frac{\pi}{2}$ (舍) 所以 $\angle C = \frac{\pi}{3}$

(2) 因为 $AB = \sqrt{3}BD$, $CD = 2BD$, 所以 $AB = \frac{\sqrt{3}}{3}BC$, $AC = \frac{\sqrt{6}}{3}BC$,

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{所以 } AD^2 = \frac{4}{9}AB^2 + \frac{1}{9}AC^2,$$

$$\text{所以 } BC = 6\sqrt{2}, AB = 2\sqrt{6}, AC = 4\sqrt{3}, \text{ 所以 } S_{\triangle ABC} = 12\sqrt{2}.$$

18. (12 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为整数，公比为 q ，且 $|q| > 1$ ，数列 $\{a_n\}$ 中有连续四项在集合 $M = \{-96, -24, 36, 48, 192\}$ 中，

(1) 求 q ，并写出数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式；

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，证明：数列 $\{S_n\}$ 中的任意连续三项按适当顺序排列后，可以成等差数列.

【考点】数列的通项公式与求和应用

【解析】

(1) 因为 $|q| > 1$ ，且各项均为整数，所以连续四项为 $-24, 48, -96, 192$ ，所以公比 $q = -2$ ，

取 $a_1 = 3, a_n = 3 \times 2^{n-1}$.

(2) 由题意， $S_n = \frac{a_1[1 - (-2)^n]}{3}$ ，所以当 n 为奇数时， $S_n = \frac{a_1(1 + 2^n)}{3}$ ，

$$S_{m+1} = \frac{a_1(1 - 2^{n+1})}{3}, S_{n-2} = \frac{a_1(1 + 2^{m+2})}{3},$$

$$\text{所以 } S_{n+1} + S_{n+2} = \frac{a_1(2 + 2^{n+1})}{2} = 2S_n,$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时， } S_n = \frac{a_1(1 - 2^n)}{3}, S_{n+1} = \frac{a_1(1 + 2^{m-1})}{3}$$

$$S_{m+2} = \frac{a_1(1 - 2^{n+2})}{3}, a(2 - 2^n) = 2S_n,$$

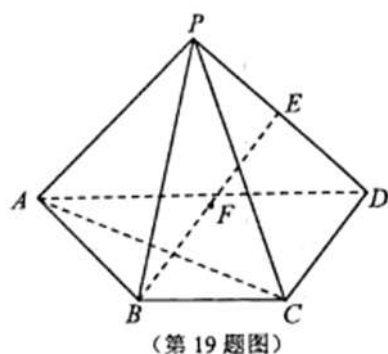
所以对 S_n 中的任意连续三项，经顺序调整后，可以构成等差数列.

19. (12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $\triangle PAD$ 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形， $BC \parallel AD$ ， $AB \perp AD$ ， $AD=2AB=2BC=2$ ， $PC=\sqrt{2}$ ， E 为 PD 的中点.

(1)求直线 PB 与平面 PAC 所成角的正弦值；

(2)设 F 是 BE 的中点，判断点 F 是否在平面 PAC 内，并请证明你的结论.



【解析】

【考点】立体几何的位置关系、直线与平面所成的角求解

【解析】

取 AD 的中点 G ，连接 PG, CG ,

因为 $\triangle PAD$ 是等腰直角三角形，所以 $PG \perp AD$,

因为 $AD=2$ ，所以 $PG=1$,

因为 $AG=1$ ，且 $AD \parallel BC$ ，所以 $AG \parallel BC$,

因为 $AG=BC=1$ ，所以四边形 $AGCB$ 为平行四边形，所以 $AB \parallel CG$,

又因为 $AB \perp AD$ ，所以 $CG \perp AD$,

又 $CG=1, PC=\sqrt{2}, PG=1$ ，所以 $PG \perp CG$,

所以可建立如图空间直角坐标系,

则 $A(0, -1, 1)$, $P(0, 0, 1)$, $C(1, 0, 0)$, $B(1, -1, 0)$,

(1) $PB = (1, -1, -1)$, $\overrightarrow{PA} = (0, -1, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$,

设平面 PAC 的一个法向量为 $n = (x, y, z)$, 则
$$\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{PA} = -y - z = 0 \\ n \cdot \overrightarrow{PC} = x + y = 0 \end{cases},$$

取 $y = -1$, $x = 1$, $z = 1$, 则 $n = (1, -1, 1)$,

则 $\cos \langle \overrightarrow{PB}, n \rangle = \frac{1+1-1}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$, 所以 PB 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$

(2) 因为 $D(0, 1, 0)$, 所以 $E(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 所以 $F(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $\overrightarrow{AF} = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, 则 $n \cdot \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 0$,

所以 AF 在平面 PAC 中, 所以 F 在平面 PAC 中.

20. (12 分)

某地发现 6 名疑似病人中有 1 人感染病毒, 需要通过血清检测确定该感染人员, 血清检测结果呈阳性的即为感染人员, 呈阴性表示没感染. 拟采用两种方案检测:

方案甲: 将这 6 名疑似病人血清逐个检测, 直到能确定感染人员为止;

方案乙: 将这 6 名疑似病人随机分成 2 组, 每组 3 人. 先将其中一组的血清混在一起检测, 若结果为阳性, 则表示感染人员在该组中, 然后再对该组中每份血清逐个检测, 直到能确定感染人员为止; 若结果为阴性, 则对另一组中每份血清逐个检测, 直到能确定感染人员为止,

(1) 求这两种方案检测次数相同的概率;

(2) 如果每次检测的费用相同, 请预测哪种方案检测总费用较少? 并说明理由.

【考点】 随机事件的概率、分布列与期望

【解析】

由题意可设甲方案检测的次数是 X ,

则 $X \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 记乙方案检测的次数是 Y , 则 $Y \in \{2, 3\}$

(1) 记两种方案检测的次数相同为事件 A , 则

$$P(A) = P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9}.$$

所以两种方案检测的次数相同的概率为 $\frac{1}{9}$.

$$(2) P(X=1) = P(X=2) = P(X=3) = P(X=4) = \frac{1}{6}, \quad P(X=5) = \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } E(X) = \frac{10}{3},$$

$$P(Y=2) = \frac{1}{3}, P(Y=3) = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3},$$

$$\text{则 } E(Y) = \frac{8}{3},$$

因为 $E(X) > E(Y)$, 所以采用乙方案.

21. (12 分)

已知 O 为坐标系原点, 椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的右焦点为点 F , 右准线为直线 n .

(1) 过点 $(4, 0)$ 的直线交椭圆 C 于 D, E 两个不同点, 且以线段 DE 为直径的圆经过原点 O , 求该直线的方程;

(2) 已知直线 l 上有且只有一个点到 F 的距离与到直线 n 的距离之比为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 直线 l 与直线 n 交

于点 N , 过 F 作 x 轴的垂线, 交直线 l 于点 M . 求证: $\frac{FM}{FN}$ 为定值.

【考点】椭圆与直线的位置关系, 解决定值问题

【解析】

21. (1) 设过点 $(4,0)$ 的直线为 $y = k(x-4)$ 交于椭圆 $D(x_1, y_1)$ $E(x_2, y_2)$

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = k(x-4) \end{cases} \text{消去 } y \text{ 得 } (4k^2+1)x^2 - 32k^2x + 64k^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{32k^2}{4k^2+1} \\ x_1x_2 = \frac{64k^2-4}{4k^2+1} \end{cases} \quad y_1y_2 = k^2[x_1x_2 - 4(x_1+x_2) + 16] = \frac{12k^2}{4k^2+1} \quad \text{又因为以线段 } DE$$

$$\text{为直径的圆经过原点, 则 } \vec{OD} \cdot \vec{OE} = x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{76k^2-4}{4k^2+1} = 0 \Rightarrow k = \pm \frac{\sqrt{19}}{19}$$

$$\text{则所求直线方程为 } y = \pm \frac{\sqrt{19}}{19}(x-4)$$

(2) 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 右准线直线 n 的方程为 $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$, 已知直线 l 上

只有一点到 F 的距离与到直线 n 的距离之比为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 可以得出直线 l 与椭圆相切, 设直线 l 的

$$\text{方程为: } y = kx + m, \text{ 联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = kx + m \end{cases} \text{消去 } y \text{ 得到: } (4k^2+1)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0$$

$$\Delta = 64k^2m^2 - 4(4k^2+1)(4m^2-4) = 0 \Rightarrow m^2 = 4k^2 + 1 \quad \text{①}$$

$$\text{联立 } \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = kx + m \end{cases} \Rightarrow FM = \sqrt{3}k + m \quad \begin{cases} x = \frac{4}{\sqrt{3}} \\ y = kx + m \end{cases} \Rightarrow \text{点 } N \text{ 坐标为 } (\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4k}{\sqrt{3}} + m)$$

$$\text{得到 } FN = \sqrt{(\frac{4}{\sqrt{3}} - \sqrt{3})^2 + (\frac{4}{\sqrt{3}}k + m)^2}$$

$$\frac{FM^2}{FN^2} = \frac{3k^2 + 2\sqrt{3}km + m^2}{\frac{1}{3} + \frac{16}{3}k^2 + \frac{8km}{\sqrt{3}} + m^2} \text{ 由 ① 式 } \Rightarrow \frac{FM^2}{FN^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{FM}{FN} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = 1 + m \ln x (m \in R)$.

(1) 当 $m=2$ 时, 一次函数 $g(x)$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \leq g(x) \leq x^2$ 恒成立, 求 $g(x)$ 的表达式;

(2)讨论关于 x 的方程 $\frac{f(x)}{f(\frac{1}{x})} = x^2$ 解的个数.

【考点】 函数与导数：恒成立问题、方程解的个数

【解析】

(1)当 $m=2$ 时, $f(x)=1+2\ln x$,

可设 $h(x)=x^2-2\ln x-1(x>0)$,

则 $h'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$, 令 $h'(x)=0$, 解得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $h(x)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增,

所以 $h(x)_{\min} = h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} - 2\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = 0$, 所以 $f(1) \leq g(1) \leq 1$,

又 $\because f(1)=1 \therefore g(1)=1$

设 $g(a)=a(x-1)+1$ 又 $\because g(x) \leq x^2$

$\therefore x^2 - ax + a - 1 \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立

$\therefore (x-1)(x+1-a) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立

$\therefore a-1=1 \therefore a=2 \therefore g(x)=2x-1$

又 $\because m(x)=1+2\ln x-2x+1=2\ln x-2x+2$

$m'(x)=\frac{2}{x}-2=\frac{2-2x}{x}$

$\therefore m(x)_{\max} = 0, \therefore 1+2\ln x \leq 2x-1$

综上 $g(x)=2x-1$

$$(2) \frac{f(x)}{f(\frac{1}{x})} = x^2 \cdot \frac{1+m\ln x}{1-m\ln x} = x^2 (x > 0)$$

$\therefore n(t)=0$ 在 $(0, +\infty)$ 恒有一解, 即 $\frac{f(x)}{f(\frac{1}{x})} = x^2$ 只有一解

② $m < 0$ 时, $n'(t) \leq 0$: $n(t)$ 在 $t \in (0, +\infty)$ 上递减

又 $\because n(1)=0$ $\therefore n(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 恒有一解

$$\textcircled{3} 0 < m < 1 \text{ 时, } n'(t) = \frac{mt^2 + (2m-4)t + m}{t(t+1)^2}$$

$\Phi(t) = mt^2 + (2m-4)t + m$, $\Phi(1) = m-4 \leq 0$. $\Phi(0) = m$. $\Phi(t) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两解, 且 $0 < t_1 < 1 < t_2$

又 $\because n(1)=0$, $\therefore n(t_1) > 0, n(t_2) > 0$

$$t > e^{\frac{1}{1-m}} \text{ 时, } n(t) = m \ln t + \frac{4}{1+m} = 2 > 2 + \frac{4}{t+1} - 2 > 0$$

$\therefore n(t) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 恒有一解, 即 $\frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = x^2$ 只有一解

② $m < 0$ 时, $n'(t) \leq 0 \therefore n(t)$ 在 $t \in (0, +\infty)$ 上递减

又 $\because n(1) = 0 \therefore n(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 恒有一解

③ $0 < m < 1$ 时, $n'(t) = \frac{mt^2 + (2m-4)t + m}{t(t+1)^2}$

设 $\varphi(t) = mt^2 + (2m-4)t + m$, $\varphi(1) = m-4 \leq 0$, $\varphi(0) = m$

$\therefore \varphi(t) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有二解, 且 $0 < t_1 < 1 < t_2$

又 $\because n(1) = 0$, $\therefore n(t_1) > 0$, $n(t_2) > 0$

当 $t > e^{\frac{2}{m}}$ 时, $n(t) = m \ln t + \frac{4}{t+1} - 2 > 2 + \frac{4}{t+1} - 2 > 0$

$\therefore n(t)$ 在 $(t_0, +\infty)$ 上恰有一根

当 $0 < t < 1$ 时, $\frac{4}{1+t} \in (2, 4)$

当 $t < e^{-\frac{2}{m}}$ 时, $m \ln t < -2$

$m \ln t + \frac{4}{1+t} - 2 < -2 + 4 - 2 < 0$

$\therefore \exists t_0 \in (0, 1)$ 且 $t_0 < e^{-\frac{2}{m}}$, 解得 $n(t_0) < 0$

$\therefore n(t)$ 在 $(0, t_1)$ 上恰有一根, $n(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恰有三根

综上, (1) $m \geq 1$ 或 $m \leq 0$ 时, $\frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = x^2$ 恰有一根

(2) $0 < m < 1$ 时, $\frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = x^2$ 恰有三根